

## Penyelesaian Numerik Model Pemangsa-Mangsa dengan Metode Jaringan Fungsi Radial Basis Menggunakan *Trigonometric Shape Parameter*

Muhammad Thahiruddin

Institut Sains dan Teknologi Annuqayah

Korespondensi penulis: [muhammad.thahiruddin@gmail.com](mailto:muhammad.thahiruddin@gmail.com)

Mohammad Jamhuri

Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

Alamat: Guluk-Guluk, Sumenep

**Abstract.** *One mathematical model in the form of a system of nonlinear ordinary differential equations is the predator-prey model. The predator-prey model explains population changes of one prey population and one predator population due to changes in time. The radial basis function network method is used to find a numerical solution to the predator-prey model. The radial basis function network method can directly approximate the function and derivative of the prey-prey model using a basis function. The basis function used is a multiquadric basis function. Numerical solutions using the radial basis function network method obtained from this research show high accuracy and low error. The absolute error obtained from the two simulations with  $t = 0.01$  each is 0.0066 in the first simulation and 0.022 in the second simulation. The errors obtained are relatively small because each only represents 0.66% of the initial value of the first type and 0.5% of the initial value of the second type. This shows that the radial basis function network method is efficient in calculating the predator-prey model solution.*

**Keywords:** *numerical solution, predator-prey model, radial basis function network.*

**Abstrak.** Salah satu model matematika yang berupa sistem persamaan diferensial biasa nonlinier ialah model pemangsa-mangsa. Model pemangsa-mangsa menjelaskan perubahan populasi dari satu populasi mangsa dan satu populasi pemangsa akibat berubahnya waktu. Metode jaringan fungsi radial basis digunakan untuk mencari penyelesaian numerik model pemangsa-mangsa. Metode jaringan fungsi radial basis bisa mendekati langsung fungsi serta turunan dari model mangsa-pemangsa menggunakan sebuah fungsi basis. Fungsi basis yang digunakan adalah fungsi basis *multiquadric*. Penyelesaian numerik dengan metode jaringan fungsi radial basis yang diperoleh dari penelitian ini menunjukkan akurasi yang tinggi dan eror yang rendah. Error absolut yang diperoleh dari kedua simulasi dengan masing-masing  $t = 0,01$  adalah sebesar 0,0066 pada simulasi pertama dan 0,022 pada simulasi kedua. Kesalahan yang diperoleh tergolong kecil karena masing-masing hanya mewakili 0,66% nilai awal tipe pertama dan 0,5% nilai awal tipe kedua. Hal ini menunjukkan bahwa metode jaringan fungsi radial basis efisien dalam menghitung penyelesaian model pemangsa-mangsa.

**Kata kunci:** jaringan fungsi radial basis, model pemangsa-mangsa, penyelesaian numerik.

## LATAR BELAKANG

Salah satu model matematika yang berupa sistem persamaan diferensial nonlinier ialah model pemangsa-mangsa. Model ini diperkenalkan pertama kali oleh Lotka dan Voltera sehingga model ini biasa disebut juga model Lotka-Voltera. Model ini menggambarkan perubahan jumlah populasi dari *predator* dan mangsanya akibat adanya interaksi antara keduanya dari waktu ke waktu.

Salah satu metode numerik yang bisa digunakan untuk menyelesaikan model pemangsa-mangsa adalah metode jaringan fungsi radial basis. Metode ini memungkinkan untuk mendekati fungsi dan turunannya secara langsung menggunakan fungsi basis. Jaringan fungsi radial basis sudah dikenal di bidang teknik dan rekayasa sebagai jaringan saraf tiruan yang menggunakan fungsi basis sebagai fungsi aktivasi. Ide jaringan fungsi radial basis diperoleh dari teori aproksimasi fungsi. Aproksimasi fungsi adalah mendekati fungsi tersebut menggunakan fungsi lainnya.

Jaringan fungsi radial basis adalah pemetaan dari suatu vektor masukan dengan  $q$ -dimensi ke vektor luaran 1 dimensi. Secara aljabar jaringan fungsi radial basis disimbolkan dengan  $f: R^q \rightarrow R^1$ . Fungsi  $f$  terdiri dari himpunan bobot  $\{\omega_i\}_{i=1}^m$  dan himpunan fungsi basis  $\{\psi(x_k, \zeta_i)\}_{i=1}^m$  dengan  $\{x_k\}_{k=1}^l$ . Fungsi basis yang digunakan sebagai fungsi aktivasi pada penelitian ini adalah fungsi *multiquadric* yang mempunyai bentuk  $\psi(x_k, \zeta_i) = \sqrt{(x_k - \zeta_i)^2 + \theta^2}$ ,  $\theta > 0$ .  $x_k$  ialah vektor masukan dan  $\zeta_i$  adalah *center point* dari  $x$  ke- $i$  (May-Dui & Tran-Cong, 2003)

## KAJIAN TEORITIS

### Jaringan Fungsi Radial Basis

Jaringan fungsi radial basis bisa mengaproksimasi sebuah fungsi  $f(x)$  yang direpresentasikan sebagai berikut:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \psi(x, \zeta_i)$$

dengan  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $\omega_i$  adalah nilai bobot yang perlu dicari nilainya dan  $\psi$  adalah fungsi aktivasi yang berupa fungsi radial basis jenis *multiquadrics* yang mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\psi(x, c_i) = \sqrt{(x - \zeta_i)^2 + \theta^2}$$

Dengan  $\theta > 0$  adalah *shape parameter* dari fungsi *multiquadrics*. Selain dapat mengaproksimasi fungsi, jaringan fungsi radial basis bisa juga mengaproksimasi turunan-turunan fungsi dengan hanya menurunkan fungsi radial basisnya (May-Dui & Tran-Cong, 2003). Bentuk aproksimasi turunan fungsi menggunakan jaringan fungsi radial basis adalah sebagai berikut:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \psi_x(x, \zeta_i)$$

Sedangkan turunan pertama dari fungsi *multiquadrics* adalah sebagai berikut:

$$\psi_t(t, \zeta_i) = \frac{t - \zeta_i}{\sqrt{((t - \zeta_i)^2 + \theta^2)}}$$

Parameter  $\theta$  yang digunakan pada penelitian ini adalah parameter yang berbentuk variabel (*variable shape-parameter*) yang terikat dengan  $i$  sehingga bentuk fungsi basisnya berubah menjadi  $\psi(x_k, \zeta_i) = \sqrt{(x_k - \zeta_i)^2 + \theta_i^2}$ . *Shape-parameter* yang dipakai adalah *trigonometric variable shape parameter* yang diperkenalkan oleh Xiang dkk. *Trigonometric variable shape-parameter* mempunyai bentuk seperti berikut:

$$\theta_i = \theta_{min} + (\theta_{max} - \theta_{min}) \sin i$$

dengan:

$$\theta_{min} = \frac{1}{\sqrt{m}},$$

$$\theta_{max} = \frac{3}{\sqrt{m}} \text{ (Xiang, Wang, Ai, Sha, \& Shi, 2012)}$$

### Model Pemangsa-mangsa

Model pemangsa-mangsa adalah model yang merepresentasikan perubahan jumlah populasi mangsa dan pemangsa terhadap waktu akibat adanya interaksi berupa pemangsaan antar kedua populasi. Misalkan populasi pemangsa dilambangkan dengan  $N$  dan populasi mangsa dengan  $P$ , populasi pemangsa dan mangsa berubah terhadap waktu  $t$ . Pada pembentukan model interaksi dari dua spesies tersebut, dapat dibangun asumsi-asumsi sebagai berikut. Pertama, pada saat tidak adanya predator, maka pertumbuhan prey sebanding dengan populasinya pada waktu  $t$ , dilambangkan dengan  $\frac{dN}{dt} = aN$ ,  $a > 0$ , saat  $P = 0$ . Kedua, pada saat tidak adanya prey, maka populasi predator akan berkurang karena kematian, dilambangkan dengan  $\frac{dP}{dt} = -bP$ ,  $b > 0$ , saat  $N = 0$ . Ketiga, koefisien terjadinya interaksi antara predator dan prey sebanding dengan populasi-

populasinya. Setiap interaksi akan menyebabkan meningkatnya populasi predator yang dilambangkan dengan  $\beta NP$ , juga menyebabkan berkurangnya populasi prey yang dilambangkan dengan  $-\alpha NP$ , dengan  $\alpha$  dan  $\beta$  keduanya positif. Akibat dari asumsi asumsi yang dibangun, dapat dibentuk persamaan seperti berikut:

$$\frac{dN}{dt} = aN - \alpha NP \quad (1)$$

$$\frac{dP}{dt} = -\beta P + bNP \quad (2)$$

dengan parameter  $a, b, \alpha,$  dan  $\beta$  adalah positif, dengan nilai awal  $N(t_1) = N_0$  dan  $P(t_1) = P_0$  (Boyce & DiPrima, 2012).

### Analisis Error

Penyelesaian numerik model pemangsa-mangsa dengan metode jaringan fungsi radial basis dapat dianalisis erornya dengan cara berikut. Pertama, persamaan (1) dan (2) dimanipulasi secara aljabar menjadi seperti berikut:

$$\frac{dN}{dt} - aN + \alpha NP = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dP}{dt} - \beta P + bNP = 0 \quad (4)$$

Kedua, nilai populasi mangsa ( $N$ ), pemangsa ( $P$ ), beserta turunannya ( $\frac{dN}{dt}, \frac{dP}{dt}$ ) pada persamaan (3) dan (4) dihitung dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis. Ketiga, nilai populasi mangsa ( $N$ ), pemangsa ( $P$ ), beserta turunannya ( $\frac{dN}{dt}, \frac{dP}{dt}$ ) yang telah diperoleh pada langkah kedua disubstitusikan ke persamaan (3) dan (4). Keempat, bandingkan hasil substitusi pada langkah ketiga dengan 0, semakin rendah selisih dengan 0, maka semakin besar akurasi penyelesaiannya. Terakhir, bandingkan selisih absolut terbesar dengan 10% dari nilai awal terkecil dari model pemangsa-mangsa untuk mengetahui selisih yang didapat pada langkah keempat sudah cukup kecil adalah dengan.

### METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan untuk menyelesaikan model pemangsa-mangsa secara numerik dengan jaringan fungsi radial basis adalah dengan menggunakan metode kajian literatur atau studi kepustakaan. Adapun langkah-langkah penelitian yang dilakukan ialah seperti berikut:

1. Ambil contoh model pemangsa-mangsa dengan parameternya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= aN(t) - \alpha N(t)P(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} &= -bP(t) + \beta N(t)P(t) \end{aligned}$$

2. Tambahkan subskrip pada variabel-variabel dependen model pemangsa-mangsa.
3. Linierisasi suku-suku nonlinier dari model pemangsa-mangsa dengan *Taylor Series*.
4. Diskritisasi model pemangsa-mangsa yang sudah dilinierisasi serta nilai awalnya dengan jaringan fungsi radial basis.
5. Masukkan nilai-nilai ( $t_k$ ) pada model *pemangsa-mangsa* yang telah diubah ke persamaan jaringan fungsi radial basis kemudian ubah ke bentuk persamaan matriks.
6. Hitung nilai bobot  $\omega_i$  dan  $v_i$  dengan perulangan.
7. Hitung penyelesaian model *pemangsa-mangsa* dengan menghitung hasil kali nilai bobot  $\omega_i$  dan  $v_i$  yang telah diperoleh dan fungsi *multiquadric* tanpa penurunan.
8. Simulasikan dan gambar grafik dari penyelesaian yang telah diperoleh.
9. Analisis eror dengan mensubstitusikan penyelesaian yang diperoleh serta turunannya pada model yang disimulasikan.
10. Penarikan kesimpulan dari hasil penelitian yang diperoleh dan saran untuk penelitian selanjutnya.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Linierisasi Model Pemangsa-Mangsa dengan Deret Taylor

Model pemangsa-mangsa merupakan persamaan diferensial nonlinier sehingga perlu dilinierkan terlebih dahulu agar dapat diselesaikan dengan metode jaringan fungsi radial basis dengan cara berikut. Pertama, variabel-variabel dependen pada model ditambahkan subskrip sebagaimana dijelaskan pada (Sarra & Kansa, 2009) sehingga persamaan (1) dan (2) menjadi sebagai berikut:

$$\frac{dN^{(n+1)}}{dt} - aN^{(n+1)} + \alpha N^{(n+1)} P^{(n+1)} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{dP^{(n+1)}}{dt} + bP^{(n+1)} - \beta N^{(n+1)} P^{(n+1)} = 0 \quad (6)$$

untuk  $n = 1, 2, \dots$  hingga kondisi terpenuhi. Suku-suku nonliniernya kemudian diliniarkan dengan deret Taylor sehingga persamaan (5) dan (6) berubah menjadi seperti berikut:

$$\frac{dN^{(n+1)}}{dt} - \alpha N^{(n+1)} + \Delta t \alpha \left( \frac{dN^{(n)}}{dt} \right) P^{(n+1)} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{dP^{(n+1)}}{dt} + \beta P^{(n+1)} - \Delta t \beta \left( \frac{dP^{(n)}}{dt} \right) N^{(n+1)} = 0 \quad (8)$$

Persamaan (7) dan (8) adalah model pemangsa-mangsa yang sudah diliniarkan menggunakan deret Taylor.

### Perubahan ke Bentuk Jaringan Fungsi Radial Basis

Persamaan (7) dan (8) kemudian diubah ke bentuk jaringan fungsi radial basis seperti dijelaskan sebelumnya, sehingga berubah menjadi sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^m \omega_i^{(n+1)} \psi(t, \zeta_i) + \sum_{i=1}^m v_i^{(n+1)} \left( \alpha N^{(n)} \psi(t, \zeta_i) + \Delta t \alpha \left( \frac{dN^{(n)}}{dt} \right) \psi(t, \zeta_i) \right) = 0 \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i^{(n+1)} \psi(t, \zeta_i) - \sum_{i=1}^m \omega_i^{(n+1)} \left( P^{(n)} \beta \psi(t, \zeta_i) + \Delta t \beta \left( \frac{dP^{(n)}}{dt} \right) \psi(t, \zeta_i) \right) = 0 \quad (10)$$

Kemudian fungsi basis *multiquadric* serta turunannya dimasukkan pada persamaan (9) dan (10) sehingga menjadi sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^m \omega_i^{(n+1)} \left( \frac{t - \zeta_i}{\sqrt{((t - \zeta_i)^2 + \theta_i^2)}} - a \sqrt{(t - \zeta_i)^2 + \theta_i^2} \right) + \sum_{i=1}^n v_i^{(n+1)} \left( \alpha N^{(n)} \sqrt{(t - \zeta_i)^2 + \theta_i^2} + \Delta t \alpha \left( \frac{dN^{(n)}}{dt} \right) \sqrt{(t - \zeta_i)^2 + \theta_i^2} \right) = 0 \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i^{(n+1)} \left( \frac{t - \zeta_i}{\sqrt{(t - \zeta_i)^2 + \theta_i^2}} + b \sqrt{(t - \zeta_i)^2 + \theta_i^2} \right) - \sum_{i=1}^m \omega_i^{(n+1)} \left( \beta P^{(n)} \sqrt{(t - \zeta_i)^2 + \theta_i^2} + \Delta t \beta \left( \frac{dP^{(n)}}{dt} \right) \sqrt{(t - \zeta_i)^2 + \theta_i^2} \right) = 0 \quad (12)$$

Untuk mempersingkat penulisan dibuat pemisalan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha N^{(n)} \sqrt{(t - \zeta_i)^2 + \theta_i^2} + \Delta t \alpha \left( \frac{dN^{(n)}}{dt} \right) \sqrt{(t - \zeta_i)^2 + \theta_i^2} &= F(t, \zeta_i) \\ \beta P^{(n)} \sqrt{(t - \zeta_i)^2 + \theta_i^2} + \Delta t \beta \left( \frac{dP^{(n)}}{dt} \right) \sqrt{(t - \zeta_i)^2 + \theta_i^2} &= H(t, \zeta_i) \end{aligned}$$

Sehingga persamaan (11) dan (12) berubah menjadi sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^m \omega_i^{(n+1)} E(t, \zeta_i) - \sum_{i=1}^m v_i^{(n+1)} F(t, \zeta_i) = 0 \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i^{(n+1)} G(t, \zeta_i) - \sum_{i=1}^m \omega_i^{(n+1)} H(t, \zeta_i) = 0 \quad (14)$$

Kondisi awal model diubah menjadi bentuk jaringan fungsi radial basis seperti berikut:

$$\sum_{i=1}^m \omega_i^{(n+1)} \psi(t_1, \zeta_i) = P_0 \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^m v_i^{(n+1)} \psi(t_1, \zeta_i) = P_0$$

### Masukkan Nilai-nilai $t_k$ dan Mengubah ke Bentuk Persamaan Matriks

Diberikan  $t = \{t_1, t_2, \dots, t_l\}$ ,  $t$  yang telah didiskritisasi. Nilai-nilai  $t$  kemudian disubstitusikan ke persamaan (13) dan (14) sehingga didapatkan sistem persamaan linier (15) dan (16) seperti berikut:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \omega_i^{(n)} E(t_1, \zeta_i) + \sum_{i=1}^m \nu_i^{(n)} F(t_1, \zeta_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^m \omega_i^{(n+1)} E(t_2, \zeta_i) + \sum_{i=1}^m \nu_i^{(n+1)} F(t_2, \zeta_i) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \sum_{i=1}^m \omega_i^{(n+1)} E(t_l, \zeta_i) + \sum_{i=1}^m \nu_i^{(n+1)} F(t_l, \zeta_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^m \nu_i^{(n)} G(t_1, \zeta_i) - \sum_{i=1}^m \omega_i^{(n)} H(t_1, \zeta_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^m \nu_i^{(n+1)} G(t_2, \zeta_i) - \sum_{i=1}^m \omega_i^{(n+1)} H(t_2, \zeta_i) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \sum_{i=1}^m \nu_i^{(n+1)} G(t_l, \zeta_i) - \sum_{i=1}^m \omega_i^{(n+1)} H(t_l, \zeta_i) &= 0 \end{aligned}$$

Kedua sistem persamaan (15) dan (16) mempunyai variabel yang sama yaitu  $\omega_i$  dan  $\nu_i$ , oleh karena itu kedua sistem persamaan tersebut dapat digabung menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \omega_i^{(n)} E(t_1, \zeta_i) + \sum_{i=1}^m \nu_i^{(n)} F(t_1, \zeta_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^m \omega_i^{(n+1)} E(t_2, \zeta_i) + \sum_{i=1}^m \nu_i^{(n+1)} F(t_2, \zeta_i) &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^m \omega_i^{(n+1)} E(t_l, \zeta_i) + \sum_{i=1}^m \nu_i^{(n+1)} F(t_l, \zeta_i) &= 0 \\ - \sum_{i=1}^m \omega_i^{(n+1)} H(t_1, \zeta_i) + \sum_{i=1}^m \nu_i^{(n+1)} G(t_1, \zeta_i) &= 0 \\ - \sum_{i=1}^m \omega_i^{(n+1)} H(t_2, \zeta_i) + \sum_{i=1}^m \nu_i^{(n+1)} G(t_2, \zeta_i) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (17)$$



$$-\sum_{i=1}^m \omega_i^{(n+1)} H(t^i, \zeta^i) + \sum_{i=1}^m v_i^{(n+1)} e(t^i, \zeta^i) = 0$$

Selanjutnya, persamaan (17) diubah ke bentuk persamaan matriks menjadi seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} E(t_1, \zeta_1) & E(t_1, \zeta_2) & \dots & E(t_1, \zeta_m) & F(t_1, \zeta_1) & F(t_1, \zeta_2) & \dots & F(t_1, \zeta_m) \\ E(t_2, \zeta_1) & E(t_2, \zeta_2) & \dots & E(t_2, \zeta_m) & F(t_2, \zeta_1) & F(t_2, \zeta_2) & \dots & F(t_2, \zeta_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(t_l, \zeta_1) & E(t_l, \zeta_2) & \dots & E(t_l, \zeta_m) & F(t_l, \zeta_1) & F(t_l, \zeta_2) & \dots & F(t_l, \zeta_m) \\ -H(t_1, \zeta_1) & -H(t_1, \zeta_2) & \dots & -H(t_1, \zeta_m) & G(t_1, \zeta_1) & G(t_1, \zeta_2) & \dots & G(t_1, \zeta_m) \\ -H(t_2, \zeta_1) & -H(t_2, \zeta_2) & \dots & -H(t_2, \zeta_m) & G(t_2, \zeta_1) & G(t_2, \zeta_2) & \dots & G(t_2, \zeta_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -H(t_l, \zeta_1) & -H(t_l, \zeta_2) & \dots & -H(t_l, \zeta_m) & G(t_l, \zeta_1) & G(t_l, \zeta_2) & \dots & G(t_l, \zeta_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^{(n+1)} \\ \omega_2^{(n+1)} \\ \vdots \\ \omega_m^{(n+1)} \\ v_1^{(n+1)} \\ v_2^{(n+1)} \\ \vdots \\ v_m^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Nilai awal kemudian juga dimasukkan pada persamaan matriks sehingga menjadi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \psi(t_1, \zeta_1) & \psi(t_1, \zeta_2) & \dots & \psi(t_1, \zeta_m) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ E(t_2, \zeta_1) & E(t_2, \zeta_2) & \dots & E(t_2, \zeta_m) & F(t_2, \zeta_1) & F(t_2, \zeta_2) & \dots & F(t_2, \zeta_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(t_l, \zeta_1) & E(t_l, \zeta_2) & \dots & E(t_l, \zeta_m) & F(t_l, \zeta_1) & F(t_l, \zeta_2) & \dots & F(t_l, \zeta_m) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi(t_1, \zeta_1) & \psi(t_1, \zeta_2) & \dots & \psi(t_1, \zeta_m) \\ -H(t_2, \zeta_1) & -H(t_2, \zeta_2) & \dots & -H(t_2, \zeta_m) & G(t_2, \zeta_1) & G(t_2, \zeta_2) & \dots & G(t_2, \zeta_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -H(t_l, \zeta_1) & -H(t_l, \zeta_2) & \dots & -H(t_l, \zeta_m) & G(t_l, \zeta_1) & G(t_l, \zeta_2) & \dots & G(t_l, \zeta_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^{(n+1)} \\ \omega_2^{(n+1)} \\ \vdots \\ \omega_m^{(n+1)} \\ v_1^{(n+1)} \\ v_2^{(n+1)} \\ \vdots \\ v_m^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Persamaan matriks (19) yang diperoleh digunakan untuk menghitung nilai-nilai  $\omega_i$  dan  $v_i$  dengan iterasi  $n = 1, 2, \dots$  hingga kondisi terpenuhi.

**Hitung Nilai Bobot  $\omega_i$  dan  $v_i$**

Penghitungan nilai bobot  $\omega_i$  dan  $v_i$  pada persamaan (19) dilakukan dengan operator *backslash* (\) pada perangkat lunak Matlab yang berfungsi untuk mencari solusi dari sistem persamaan linier.

$$\begin{bmatrix} \psi(t_1, \zeta_1) & \psi(t_1, \zeta_2) & \dots & \psi(t_1, \zeta_m) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ E(t_2, \zeta_1) & E(t_2, \zeta_2) & \dots & E(t_2, \zeta_m) & F(t_2, \zeta_1) & F(t_2, \zeta_2) & \dots & F(t_2, \zeta_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(t_l, \zeta_1) & E(t_l, \zeta_2) & \dots & E(t_l, \zeta_m) & F(t_l, \zeta_1) & F(t_l, \zeta_2) & \dots & F(t_l, \zeta_m) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi(t_1, \zeta_1) & \psi(t_1, \zeta_2) & \dots & \psi(t_1, \zeta_m) \\ -H(t_2, \zeta_1) & -H(t_2, \zeta_2) & \dots & -H(t_2, \zeta_m) & G(t_2, \zeta_1) & G(t_2, \zeta_2) & \dots & G(t_2, \zeta_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -H(t_l, \zeta_1) & -H(t_l, \zeta_2) & \dots & -H(t_l, \zeta_m) & G(t_l, \zeta_1) & G(t_l, \zeta_2) & \dots & G(t_l, \zeta_m) \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

$$\begin{bmatrix} -\hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_m, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m \end{bmatrix}^T = \mathbf{c}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1^{(n+1)}, \omega_2^{(n+1)}, \dots, \omega_m^{(n+1)}, v_1^{(n+1)}, v_2^{(n+1)}, \dots, v_m^{(n+1)} \end{bmatrix}^T = \mathbf{\Omega}^{(n+1)}$$

sehingga nilai  $\Omega$  bisa dihitung dengan cara seperti berikut:

$$\Omega^{(n+1)} = A \setminus F$$

Penyelesaian awal  $N^{(1)}$  dan  $P^{(1)}$  bisa dibangkitkan dengan cara acak, namun pada penelitian ini ditentukan  $N^{(1)}(t_k) = \sin t_k$  dan  $P^{(1)}(t_k) = \cos t_k$ . Iterasi pencarian nilai bobot berhenti saat batas toleransi eror yang sudah ditentukan sebelumnya ( $\epsilon$ ) sudah dicapai dengan perhitungan  $\max|[N^{(l)}, P^{(l)}] - [N^{(l+1)}, P^{(l+1)}]| \leq \epsilon$ .

### Hitung Penyelesaian Model Pemangsa-mangsa

Setelah mendapatkan nilai bobot yang optimal, penyelesaian numerik untuk mangsa ( $N$ ) diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \psi(t_1, \varsigma_1) & \psi(t_1, \varsigma_2) & \dots & \psi(t_1, \varsigma_m) \\ \psi(t_2, \varsigma_1) & \psi(t_2, \varsigma_2) & \dots & \psi(t_2, \varsigma_m) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \psi(t_l, \varsigma_1) & \psi(t_l, \varsigma_2) & \dots & \psi(t_l, \varsigma_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0 \\ N(t_2) \\ \vdots \\ N(t_l) \end{bmatrix}$$

Sedangkan untuk populasi pemangsa ( $P$ ) penyelesaiannya diperoleh dengan cara seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} \psi(t_1, \varsigma_1) & \psi(t_1, \varsigma_2) & \dots & \psi(t_1, \varsigma_m) \\ \psi(t_2, \varsigma_1) & \psi(t_2, \varsigma_2) & \dots & \psi(t_2, \varsigma_m) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \psi(t_l, \varsigma_1) & \psi(t_l, \varsigma_2) & \dots & \psi(t_l, \varsigma_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P(t_2) \\ \vdots \\ P(t_l) \end{bmatrix}$$

### Simulasi Numerik

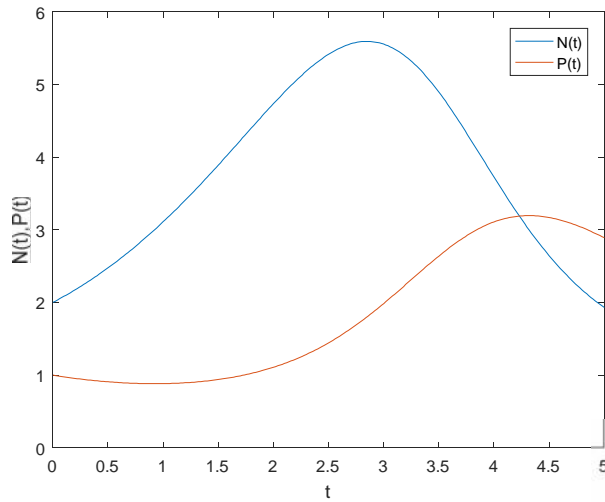
Simulasi dilakukan dengan menyelesaikan dua model pemangsa-mangsa. Model pertama adalah model dengan parameter-parameter yang ditentukan secara acak yang mempunyai bentuk seperti berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= 0,9N(t) - 0,5N(t)P(t) & 0 \leq t \leq 5 \\ \frac{dP(t)}{dt} &= -0,75P(t) + 0,25N(t)P(t) \end{aligned} \quad (20)$$

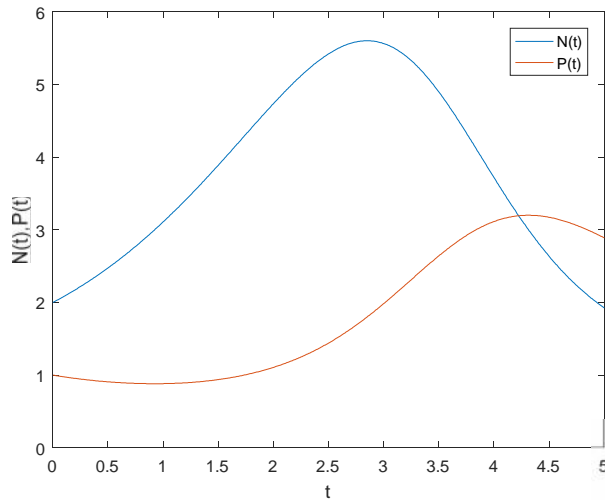
Dengan nilai awal  $N_0 = 2$  dan  $P_0 = 1$ . Model kedua adalah model yang diperoleh dari artikel (Paul, Mondal, & Bhattacharya, 2016) yang mempunyai bentuk seperti berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= 0,1N(t) - 0,0014N(t)P(t) & 0 \leq t \leq 15 \\ \frac{dP(t)}{dt} &= -0,08P(t) + 0,0012N(t)P(t) \end{aligned} \quad (21)$$

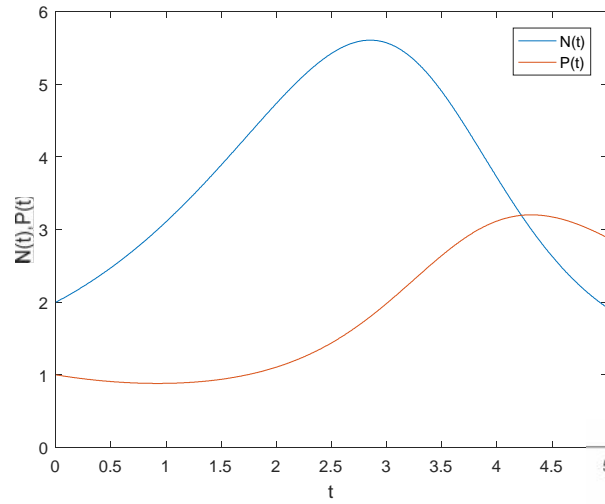
Dengan nilai awal  $N_0 = 4$  dan  $P_0 = 9$ . Simulasi dilakukan dengan  $\Delta t = 0.02$ ,  $0.01$ , dan  $0.005$ . Penyelesaian awal  $N^{(1)}$  dan  $P^{(1)}$  ditentukan  $N(t)^{(1)} = \sin t + N_0$  dan  $P(t)^{(1)} = \sin t + P_0$ . Hasil penyelesaian numerik yang dilakukan dengan program Matlab ditunjukkan pada gambar-gambar berikut:



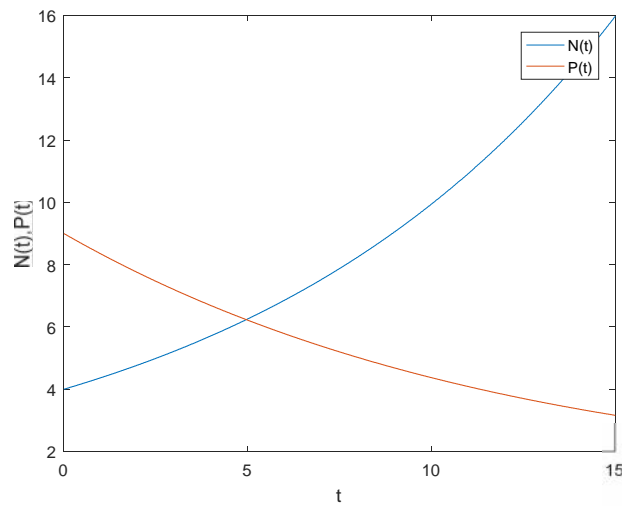
**Gambar 1. Penyelesaian Numerik Model (20) dengan  $\Delta t = 0.02$**



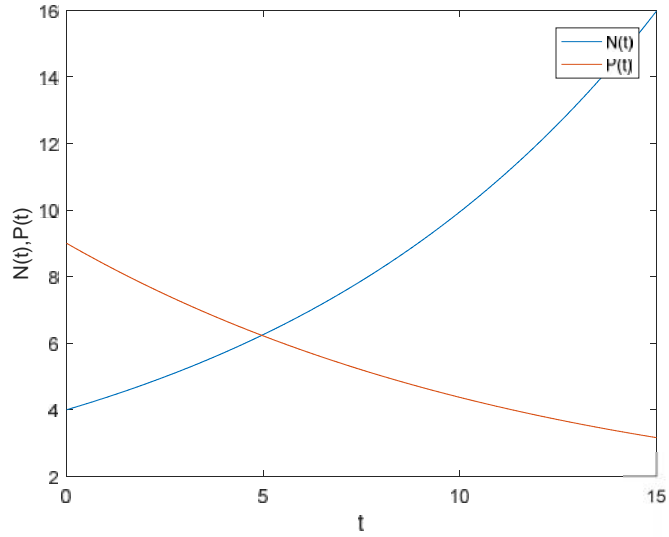
**Gambar 2. Penyelesaian Numerik Model (20) dengan  $\Delta t = 0.01$**



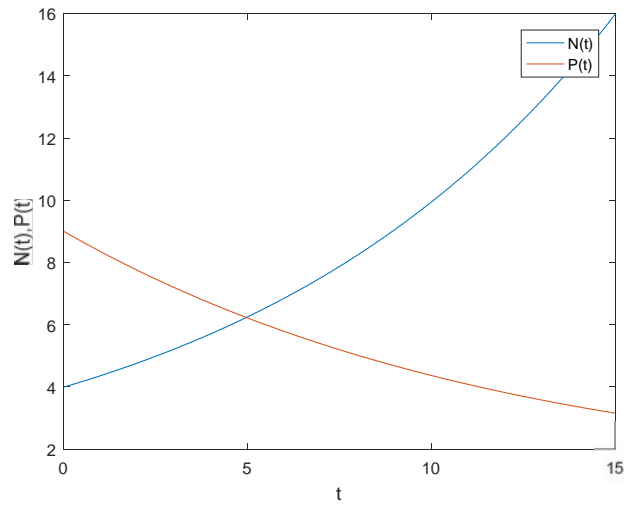
**Gambar 3. Penyelesaian Numerik Model (20) dengan  $\Delta t = 0.005$**



**Gambar 4. Penyelesaian Numerik Model (21) dengan  $\Delta t = 0.02$**



**Gambar 5. Penyelesaian Numerik Model (21) dengan  $\Delta t = 0.01$**



**Gambar 6. Penyelesaian Numerik Model (21) dengan  $\Delta t = 0.005$**

### Analisis Error

Analisis error dilakukan untuk mengetahui seberapa dekat penyelesaian numerik pada penyelesaian eksaknya. error dari penyelesaian numerik didapat dengan cara sabagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dN(t_1)}{dt} - aN(t_1) + \alpha N(t_1)P(t_1) \\ \frac{dN(t_2)}{dt} - aN(t_2) + \alpha N(t_2)P(t_2) \\ \vdots \\ \frac{dN(t_n)}{dt} - aN(t_n) + \alpha N(t_n)P(t_n) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dP(t_1)}{dt} + bP(t_1) - \beta N(t_1)P(t_1) \\ \frac{dP(t_2)}{dt} + bP(t_2) - \beta N(t_2)P(t_2) \\ \vdots \\ \frac{dP(t_n)}{dt} + bP(n) - \beta N(n)P(t_n) \end{bmatrix} \quad (23)$$

Hasil dari perhitungan error mutlak maksimum untuk model pertama saat  $t = 0.02$  adalah 0.0255 untuk model pertama, sedangkan untuk model kedua didapat  $\max \varepsilon = 0.0344$ . Error saat  $t = 0.01$  adalah 0.013 untuk model (20) dan 0.022 untuk model (21). Sedangkan error saat  $t = 0.005$  adalah 0.0066 untuk model pertama dan 0.0480.

Dari hasil simulasi yang dilakukan dapat disimpulkan bahwa besarnya error tidak dipengaruhi oleh nilai  $t$ . Hasil error terkecil dari penyelesaian model (20) dari dua simulasi yang dilakukan ialah saat  $t = 0,01$ . Penjelasan mengenai analisis error ini, dapat dikaji pada penelitian selanjutnya untuk mencari  $t$  yang optimal sehingga diperoleh error absolut terkecil. Walaupun demikian, hasil simulasi yang telah dilakukan menunjukkan bahwa metode jaringan fungsi radial basis efektif dalam mendekati penyelesaian model pemangsa-mangsa (20) maupun (21) walaupun terdapat error pada masing-masing simulasi. Perlu diingat bahwa penyelesaian numerik hanyalah penyelesaian pendekatan saja di mana penyelesaian yang diperoleh bukan berupa penyelesaian analitik atau penyelesaian eksak sehingga terdapat error yang berupa selisih antara penyelesaian numerik dan penyelesaian analitik.

## KESIMPULAN DAN SARAN

Dari penelitian yang telah dilakukan diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Jaringan fungsi radial basis cukup efektif untuk menyelesaikan model *pemangsa-mangsa* dengan diperolehnya eror yang cukup kecil pada setiap simulasi.
2. Penyelesaian numerik model pemangsa-mangsa menggunakan metode jaringan fungsi radial basis tidak bergantung pada besar kecilnya  $t$ , sehingga perlu dilakukan penelitian lanjutan untuk memilih  $t$  yang optimal agar dihasilkan penyelesaian yang terbaik.
3. Jaringan fungsi radial basis tidak dapat selalu konvergen dalam menyelesaikan model *pemangsa-mangsa* dan perlu dilakukan penelitian lanjutan untuk menganalisis kekonvergenannya.
4. Saran untuk penelitian selanjutnya ialah perlu melakukan optimasi terhadap  $t$  sehingga bisa mendapatkan penyelesain yang paling akurat

## DAFTAR REFERENSI

- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2012). *Elementary Differential Equation* (10th ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- May-Dui, N., & Tran-Cong, T. (2001). Numerical solution of differential equations using multiquadric radial basis function networks. *Neural Networks*, 14(2), 185-199. doi:10.1016/S0893-6080(00)00095-2
- May-Dui, N., & Tran-Cong, T. (2003). Approximation of Function and Its Derivatives Using Radial Basis Function Networks. *Applied Mathematical Modelling*, 27(3), 197-220. doi:10.1016/S0307-904X(02)00101-4
- Paul, S., Mondal, S. P., & Bhattacharya, P. (2016). Numerical Solution of Lotka Volterra Prey Predator Model by using Runge–Kutta–Fehlberg Method and Laplace Adomian Decomposition Method. *Alexandria Engineering Journal*, 55(1), 613-617. doi:10.1016/j.aej.2015.12.026
- Sarra, S. A., & Kansa, E. J. (2009). *Multiquadric Radial Basis Function Approximation Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*.
- Xiang, S., Wang, K.-m., Ai, Y.-t., Sha, Y.-d., & Shi, H. (2012). Trigonometric Variable Shape Parameter and Exponent Strategy for Generalized Multiquadric Radial Basis Function Approximation. *Applied Mathematical Modelling*, 32(5), 1931-1938. doi:10.1016/j.apm.2011.07.076