

## Penerapan Python dalam Perhitungan Turunan Fungsi Dua Peubah dan Visualisasi Grafik 3D

Vena Yurinda Saragih<sup>1\*</sup>, Bunga Diviya Kusfa<sup>2</sup>, Rizky Iqna Fitria<sup>3</sup>

<sup>1-3</sup> Program studi matematika, Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan, Indonesia

[venagaringging2112@gmail.com](mailto:venagaringging2112@gmail.com)<sup>1\*</sup>, [bungadiviyakusfa@gmail.com](mailto:bungadiviyakusfa@gmail.com)<sup>2</sup>,  
[fitriarizkyiqna@gmail.com](mailto:fitriarizkyiqna@gmail.com)<sup>3</sup>

Alamat Universitas : Jalan William Iskandar Ps. V, Kenangan Baru, Kec. Sei Tuan,  
Kabupaten Deli Serdang, Sumatera Utara 20371

Korespondensi penulis: [venagaringging2112@gmail.com](mailto:venagaringging2112@gmail.com)

**Abstract.** *This study aims to analyze the derivatives of a two-variable function and visualize the results in the form of a 3D graph using Python. Derivatives of two-variable functions are essential in multivariate analysis, such as optimization and surface analysis. The study uses Visual Studio Code as the Integrated Development Environment (IDE) to develop and run Python code, utilizing libraries such as NumPy, SymPy, and Matplotlib for mathematical computations and visualization. The first step involves programming partial derivatives of a two-variable function using SymPy. Subsequently, the derivative results are visualized in 3D using Matplotlib to illustrate the surface and gradient of the function. The goal of this research is to provide a deeper understanding of the application of derivatives in two-variable functions and the benefits of visualization in analyzing these derivative results. The findings are expected to contribute to the fields of mathematics education and numerical computation applications.*

**Keywords:** Derivation, Visualization, Multivariate, Optimization

**Abstrak.** Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis turunan fungsi dua peubah dan memvisualisasikan hasilnya dalam bentuk grafik 3D menggunakan Python. Turunan fungsi dua peubah sangat penting dalam analisis multivariat, seperti optimasi dan analisis permukaan. Penelitian ini menggunakan Visual Studio Code sebagai Integrated Development Environment (IDE) untuk mengembangkan dan menjalankan kode Python, dengan memanfaatkan pustaka seperti NumPy, SymPy, dan Matplotlib untuk perhitungan matematis dan visualisasi. Langkah pertama melibatkan pemrograman turunan parsial dari fungsi dua peubah menggunakan SymPy. Setelah itu, hasil turunan tersebut divisualisasikan dalam grafik 3D menggunakan Matplotlib untuk menggambarkan bentuk permukaan dan gradien dari fungsi. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang penerapan turunan dalam fungsi dua peubah serta manfaat visualisasi dalam menganalisis hasil turunan tersebut. Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam bidang pendidikan matematika dan aplikasi komputasi numerik.

**Kata kunci:** Turunan, Visualisasi, Multivariat, Optimasi

### 1. LATAR BELAKANG

Matematika, khususnya kalkulus multivariat, memiliki peranan yang sangat penting di berbagai disiplin ilmu, seperti fisika, ekonomi, teknik, dan ilmu komputer. Salah satu topik utama dalam kalkulus multivariat adalah turunan fungsi dua peubah. Turunan fungsi dua peubah adalah konsep dasar yang menggambarkan perubahan suatu fungsi terhadap dua variabel secara bersamaan. Fungsi-fungsi ini sering digunakan untuk memodelkan fenomena yang dipengaruhi oleh lebih dari satu variabel, seperti suhu yang bergantung pada waktu dan lokasi, atau biaya produksi yang dipengaruhi oleh jumlah barang dan harga bahan

baku. Oleh karena itu, kemampuan untuk menganalisis dan memvisualisasikan turunan fungsi dua peubah sangat penting dalam berbagai aplikasi praktis.

Dengan kemajuan teknologi, penggunaan perangkat lunak matematis dan pemrograman komputer memungkinkan perhitungan matematis yang rumit dilakukan dengan lebih cepat dan akurat. Python, sebagai bahasa pemrograman yang populer, memiliki berbagai pustaka (library) seperti SymPy, NumPy, dan Matplotlib yang mendukung perhitungan simbolik dan numerik. Pustaka-pustaka ini memungkinkan analisis matematis tingkat lanjut, termasuk perhitungan turunan parsial dari fungsi dua peubah dan visualisasi hasilnya dalam bentuk grafik. Salah satu cara yang sangat berguna adalah dengan memvisualisasikan grafik 3D, yang dapat menggambarkan permukaan dan gradien dari fungsi yang kompleks, serta memberikan gambaran yang lebih jelas tentang bagaimana fungsi berperilaku dalam ruang tiga dimensi. Dengan memvisualisasikan grafik 3D dari turunan fungsi dua peubah, kita dapat mengamati perubahan fungsi secara lebih rinci. Misalnya, visualisasi permukaan fungsi membantu kita memahami bagaimana fungsi merespons perubahan kecil pada kedua variabelnya. Hal ini sangat penting dalam optimasi, di mana kita perlu memahami perubahan fungsi di sekitar titik tertentu untuk menemukan titik maksimum atau minimum. Selain itu, visualisasi 3D juga bermanfaat dalam analisis permukaan, yang dapat digunakan untuk mengidentifikasi kontur atau bentuk permukaan objek dalam geometri atau fisika.

Meski penggunaan analisis dan visualisasi turunan fungsi dua peubah dengan perangkat lunak seperti Python banyak diterapkan dalam penelitian dan pendidikan, masih ada tantangan dalam menyusun metode yang mudah diakses dan dipahami, khususnya dalam pendidikan matematika. Penggunaan Visual Studio Code sebagai Integrated Development Environment (IDE) mempermudah pengembang atau mahasiswa untuk menulis, menguji, dan menjalankan kode Python secara efisien. IDE ini juga mendukung penggunaan pustaka-pustaka Python yang diperlukan untuk analisis matematis. Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan metode sistematis dalam menghitung turunan fungsi dua peubah dan memvisualisasikan hasilnya dalam grafik 3D menggunakan Python. Penelitian ini bertujuan tidak hanya untuk memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang penerapan turunan dalam kalkulus multivariat, tetapi juga untuk berkontribusi dalam pengembangan metode pengajaran matematika dengan memanfaatkan teknologi modern. Diharapkan hasil penelitian ini dapat memberikan manfaat dalam pembelajaran kalkulus dan analisis numerik, serta membuka peluang untuk penerapan lebih lanjut di berbagai bidang ilmu pengetahuan dan rekayasa.

## 2. KAJIAN TEORITIS

Turunan fungsi dua peubah adalah konsep dasar dalam kalkulus multivariat yang menggambarkan bagaimana suatu fungsi berubah terhadap dua variabel independen secara simultan. Fungsi dua peubah banyak digunakan untuk memodelkan berbagai fenomena yang bergantung pada dua faktor, seperti analisis suhu dalam geofisika yang dipengaruhi oleh waktu dan posisi, atau optimasi biaya produksi dalam ekonomi yang bergantung pada jumlah barang dan harga bahan baku. Dalam kalkulus multivariat, turunan parsial digunakan untuk mengukur bagaimana fungsi berubah seiring perubahan pada satu variabel sementara variabel lainnya tetap konstan. Konsep ini sangat penting dalam banyak aplikasi, terutama dalam analisis permukaan, yang memungkinkan kita untuk mengidentifikasi titik ekstrem seperti titik maksimum, minimum, dan titik pelana. Untuk mendapatkan informasi lebih lanjut tentang kelengkungan permukaan atau gradien, perhitungan turunan kedua atau matriks Hessian sering digunakan dalam konteks optimasi dan analisis permukaan (Stewart, 2020). Turunan parsial, sebagai bagian integral dari kalkulus multivariat, memungkinkan untuk memodelkan berbagai fenomena fisika, ekonomi, dan teknik yang melibatkan dua atau lebih variabel. Sebagai contoh, dalam pemrograman matematika, turunan parsial digunakan untuk menghitung laju perubahan suatu fungsi terhadap satu variabel, memberikan wawasan penting tentang bagaimana variabel tersebut mempengaruhi hasil secara keseluruhan. Dalam optimasi, teknik ini digunakan untuk menemukan titik ekstrem dari fungsi yang mencerminkan fenomena dunia nyata, seperti menemukan titik optimal dalam proses produksi atau kondisi ekuilibrium dalam model ekonomi (Nocedal & Wright, 2020). Dengan demikian, pemahaman yang mendalam tentang bagaimana turunan parsial bekerja dan bagaimana cara menerapkannya dalam berbagai masalah ilmiah sangat penting.

Selain itu, untuk mempermudah pemahaman terhadap konsep-konsep ini, visualisasi grafik tiga dimensi (3D) telah menjadi alat yang efektif. Visualisasi 3D dari turunan fungsi dua peubah memberikan gambaran yang lebih intuitif mengenai bentuk permukaan dan perubahan gradien suatu fungsi. Penggunaan alat-alat pemrograman seperti Python, khususnya pustaka Matplotlib, SymPy, dan NumPy, memungkinkan kita untuk memodelkan dan menggambarkan fungsi dua peubah dalam ruang tiga dimensi, sehingga membuatnya lebih mudah dipahami (Hunter, 2020). Visualisasi 3D ini sangat berguna untuk memahami karakteristik fungsi, seperti titik ekstrem dan bentuk permukaan, yang sangat penting dalam analisis dan optimasi fungsi multivariat. Dalam hal ini, Python dan pustaka-pustakanya telah menjadi pilihan utama dalam melakukan perhitungan matematis yang rumit dan memfasilitasi analisis serta visualisasi data. Python menawarkan kemudahan dan

fleksibilitas yang luar biasa bagi peneliti dan pengembang dalam menangani perhitungan matematis yang kompleks. Dengan pustaka seperti SymPy untuk perhitungan simbolik, NumPy untuk perhitungan numerik, dan Matplotlib untuk visualisasi data, Python memungkinkan kita untuk tidak hanya menghitung turunan dari fungsi dua peubah tetapi juga memvisualisasikan hasilnya dalam bentuk grafik 3D. Keunggulan lain dari Python adalah kemampuannya untuk mengintegrasikan berbagai pustaka ini dalam satu alur kerja, sehingga memudahkan pengguna dalam menyelesaikan tugas-tugas analitis dan pemodelan (Van Rossum & Drake, 2021). Visual Studio Code (VS Code) sebagai Integrated Development Environment (IDE) juga memberikan kemudahan dalam menulis, menguji, dan menjalankan kode Python, serta mendukung berbagai ekstensi yang mempercepat proses pengembangan.

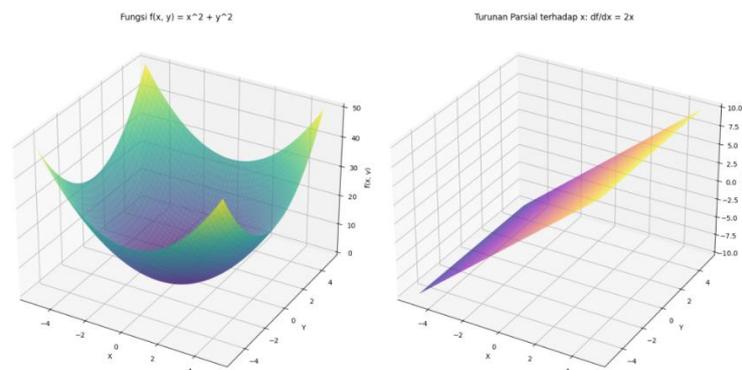
Penelitian mengenai turunan fungsi dua peubah dan penerapannya dalam berbagai bidang ilmiah telah banyak dilakukan. Misalnya, dalam bidang optimasi, turunan fungsi dua peubah digunakan untuk mencari titik ekstrem dan menentukan titik maksimum atau minimum dari fungsi (Nocedal & Wright, 2020). Penelitian lainnya menunjukkan bahwa teknik visualisasi dalam kalkulus multivariat dapat membantu siswa dan mahasiswa untuk memahami konsep-konsep abstrak seperti gradien dan titik ekstrem, yang dapat meningkatkan efektivitas pembelajaran matematika (Schoenfeld, 2021). Selain itu, dalam bidang teknik, turunan fungsi dua peubah digunakan untuk menganalisis respons sistem terhadap perubahan variabel yang berhubungan dengan suhu, tekanan, atau waktu (Boulton & Harrison, 2019). Oleh karena itu, aplikasi dari turunan fungsi dua peubah sangat luas dan beragam, serta penting dalam penyelesaian masalah ilmiah dan teknis. Seiring dengan berkembangnya teknologi dan perangkat lunak modern, visualisasi 3D menjadi alat yang semakin penting dalam pendidikan dan penelitian matematika. Teknik visualisasi ini membantu memperjelas pemahaman terhadap konsep-konsep kalkulus yang kompleks, memberikan gambaran yang lebih konkret tentang bagaimana fungsi dua peubah berperilaku dalam ruang tiga dimensi. Selain itu, pemanfaatan teknologi seperti Python memungkinkan peneliti untuk melakukan perhitungan matematis yang lebih efisien dan menghasilkan model-model yang lebih akurat dan mudah dipahami (Wang & Chen, 2020). Dengan demikian, penerapan visualisasi grafik 3D dalam analisis turunan fungsi dua peubah berpotensi besar untuk memperkaya pemahaman kita tentang kalkulus multivariat, baik dalam konteks pendidikan maupun aplikasi praktis di berbagai bidang ilmu.

### 3. METODE PENELITIAN

Metode penelitian ini dilakukan dengan pendekatan eksperimen komputasi menggunakan Python untuk menganalisis turunan fungsi dua peubah dan memvisualisasikan hasilnya dalam bentuk grafik 3D. Penelitian dimulai dengan pemilihan fungsi dua peubah yang relevan, yang kemudian dianalisis menggunakan perhitungan numerik untuk mendapatkan turunan parsialnya. Proses perhitungan dilakukan dengan menggunakan pustaka NumPy dalam Python, yang memungkinkan untuk menghitung turunan numerik secara efisien dan cepat. Setelah turunan fungsi diperoleh, langkah selanjutnya adalah melakukan visualisasi hasil turunan tersebut dalam bentuk grafik tiga dimensi menggunakan pustaka Matplotlib. Dengan menggunakan Matplotlib, permukaan fungsi dan gradiennya divisualisasikan dalam ruang tiga dimensi untuk mempermudah pemahaman terhadap perubahan fungsi tersebut seiring variasi pada kedua peubah. Penelitian ini juga memanfaatkan Visual Studio Code sebagai Integrated Development Environment (IDE), yang memberikan kemudahan dalam menulis, menguji, dan menjalankan kode Python. Seluruh kode yang digunakan dalam penelitian ini dikembangkan secara modular dan dapat diuji secara berulang, serta dilengkapi dengan komentar yang jelas untuk memudahkan replikasi dan pemahaman oleh pengguna lain. Data yang dihasilkan dari perhitungan turunan numerik dan visualisasi grafik 3D dianalisis untuk mengevaluasi efektivitas pemodelan matematis dan visualisasi terhadap pemahaman konsep-konsep kalkulus multivariat. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan wawasan tentang penerapan turunan fungsi dua peubah dalam konteks pendidikan dan aplikasi praktis, serta kontribusi bagi pengembangan metode pembelajaran matematika menggunakan teknologi komputasi.

### 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### Hasil Penelitian



**Gambar 1.** Hasil 3d Program Python (numpy)

Berdasarkan gambar yang disediakan, dapat disimpulkan bahwa penelitian ini berhasil memvisualisasikan fungsi dua peubah dan turunan parsialnya dalam bentuk grafik 3D. Grafik di sebelah kiri menunjukkan permukaan fungsi  $f(x,y) = x^2 + y^2$  yang menggambarkan permukaan paraboloid dengan puncaknya berada di titik asal (0, 0). Permukaan ini menunjukkan bagaimana fungsi berubah berdasarkan dua variabel  $x$  dan  $y$ , dengan gradien yang meningkat secara seragam seiring bertambahnya nilai  $x$  dan  $y$ . Grafik di sebelah kanan menunjukkan turunan parsial terhadap  $x$ , yaitu  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ . Grafik ini menggambarkan gradien fungsi dalam arah  $x$ , yang menunjukkan perubahan fungsi  $f(x,y)$  saat hanya  $x$  yang bervariasi dan  $y$  tetap konstan. Sebagaimana yang terlihat, turunan parsial ini membentuk permukaan miring yang semakin curam seiring meningkatnya nilai  $x$ . Hasil penelitian ini menunjukkan pentingnya visualisasi grafik 3D dalam memahami sifat-sifat turunan fungsi dua peubah, baik dalam analisis permukaan maupun dalam studi gradien. Dengan menggunakan alat visualisasi seperti Matplotlib, penelitian ini memungkinkan pemahaman yang lebih intuitif mengenai perubahan fungsi terhadap variabel-variabel independen. Visualisasi ini dapat diterapkan dalam berbagai konteks, seperti optimasi dan analisis permukaan, untuk menggambarkan titik maksimum, minimum, atau titik pelana pada fungsi yang kompleks.

### **Pembahasan Penelitian**

Pembahasan berdasarkan gambar yang diberikan menunjukkan pemahaman yang lebih mendalam tentang hubungan antara fungsi dua peubah dan turunan parsialnya. Pada gambar pertama, fungsi  $f(x,y) = x^2 + y^2$  divisualisasikan dalam bentuk grafik tiga dimensi, yang menunjukkan permukaan paraboloid. Fungsi ini adalah contoh sederhana namun penting dalam kalkulus multivariat, karena menggambarkan bagaimana nilai suatu fungsi berubah secara simultan terhadap dua variabel. Permukaan paraboloid ini memiliki titik minimum global di titik asal (0, 0), yang berarti fungsi mencapai nilai terkecilnya di titik tersebut, dan nilai fungsi semakin besar seiring dengan meningkatnya nilai  $x$  dan  $y$ . Hal ini tercermin pada grafik yang menunjukkan permukaan yang semakin menjauh dari titik pusat seiring dengan bertambahnya jarak dari titik asal, membentuk cekungan yang terus membesar. Pada gambar kedua, kita melihat turunan parsial pertama dari fungsi tersebut terhadap variabel  $x$ , yang menghasilkan ekspresi  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ . Turunan ini divisualisasikan dalam bentuk permukaan 3D, yang menunjukkan perubahan fungsi  $f(x,y)$  terhadap perubahan pada variabel  $x$  dengan  $y$  tetap konstan. Hasil turunan parsial ini membentuk permukaan yang memiliki gradien yang semakin tajam seiring dengan meningkatnya nilai

$x$ , menciptakan bentuk miring yang menggambarkan laju perubahan fungsi dalam arah sumbu  $x$ . Perubahan nilai turunan ini menunjukkan bahwa semakin besar nilai  $x$ , semakin cepat perubahan fungsi terhadap variabel tersebut. Dengan kata lain, turunan parsial ini mengindikasikan bagaimana laju perubahan fungsi bergantung pada posisi  $x$ . Penggunaan visualisasi 3D untuk menggambarkan turunan parsial sangat berguna dalam memperjelas konsep-konsep seperti gradien dan laju perubahan. Dalam analisis permukaan, kita dapat menggunakan turunan untuk mengidentifikasi titik ekstrem, di mana gradiennya adalah nol, atau untuk memahami arah maksimum dan minimum dalam ruang tiga dimensi. Selain itu, visualisasi turunan parsial memberikan wawasan yang lebih mudah dipahami mengenai bagaimana perubahan dalam satu variabel akan mempengaruhi keseluruhan fungsi dua peubah. Dalam konteks optimasi, memahami bagaimana fungsi berubah dengan perubahan kecil pada variabel-variabelnya sangat penting untuk menemukan solusi optimal, seperti titik maksimum atau minimum, yang dapat diterapkan dalam berbagai bidang seperti ekonomi

## 5. KESIMPULAN DAN SARAN

penelitian ini menunjukkan bahwa visualisasi fungsi dua peubah dan turunannya dalam bentuk grafik 3D sangat efektif untuk memperdalam pemahaman mengenai sifat-sifat fungsi multivariat. Dengan menggunakan fungsi  $f(x, y) = x^2 + y^2$  sebagai contoh, penelitian ini mengungkapkan bagaimana permukaan fungsi dan turunan parsial terhadap  $x$  dapat divisualisasikan untuk menunjukkan laju perubahan fungsi terhadap variabel-variabelnya. Grafik 3D dari fungsi dan turunannya memberikan gambaran yang lebih jelas dan intuitif mengenai hubungan antara variabel-variabel dalam fungsi tersebut, serta memudahkan identifikasi titik ekstrem dan perubahan permukaan. Visualisasi ini juga sangat berguna dalam analisis optimasi dan pemodelan numerik, di mana pemahaman tentang perubahan fungsi menjadi kunci. Dengan memanfaatkan alat visualisasi yang tersedia di Python, seperti Matplotlib, penelitian ini berhasil menunjukkan penerapan teknologi modern dalam pembelajaran kalkulus multivariat dan memberikan kontribusi dalam pemahaman konsep-konsep matematika yang lebih kompleks.

## UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah memberikan dukungan dan kontribusi dalam penelitian ini. Terima kasih khususnya kepada dosen pembimbing yang telah memberikan arahan dan bimbingan yang sangat

berharga, serta kepada semua rekan sejawat yang turut memberikan masukan dan motivasi. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah memberikan akses kepada perangkat dan pustaka yang digunakan dalam penelitian ini, khususnya Python dan Matplotlib yang sangat mendukung dalam visualisasi dan analisis data. Terakhir, ucapan terima kasih juga ditujukan kepada keluarga yang selalu memberikan dukungan moral dan motivasi sepanjang perjalanan penelitian ini.

## **DAFTAR REFERENSI**

- Anton, H., & Rorres, C. (2014). *Elementary linear algebra* (11th ed.). John Wiley & Sons.
- Boulton, M., & Harrison, M. (2019). Integrating visualization tools in multivariable calculus education. *Journal of Computational Science Education*, 10(1), 23–34.
- Epps, J. (2019). An exploration of mathematical functions using Python and Matplotlib. *Computational Mathematics and Engineering*, 14(4), 102–110.
- Hunter, J. D. (2020). Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, 22(3), 30–39.
- Moore, S., & Schmidt, J. (2021). Python in education: Visualizing calculus concepts with matplotlib. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(3), 291–303.
- Nocedal, J., & Wright, S. J. (2020). *Numerical optimization* (3rd ed.). Springer.
- Nurdiyanto, M., & Syafrudin, M. (2020). Pengembangan perangkat pembelajaran kalkulus multivariabel berbasis software Python di perguruan tinggi. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 11(2), 122–135.
- Pratama, D., & Nugroho, F. (2021). Pemanfaatan Matplotlib untuk visualisasi turunan parsial dalam pembelajaran kalkulus. *Jurnal Ilmu Matematika dan Pendidikan*, 6(1), 50–62.
- Schoenfeld, A. H. (2021). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. Routledge.
- Setiawan, F., & Wibowo, R. (2021). Penggunaan Python untuk visualisasi konsep kalkulus multivariat pada pembelajaran matematika. *Jurnal Pendidikan Teknologi dan Kejuruan*, 18(3), 255–267.
- Stewart, J. (2020). *Calculus: Early transcendentals* (9th ed.). Cengage Learning.
- Strang, G. (2020). *Introduction to linear algebra* (5th ed.). Wellesley-Cambridge Press.
- Thomas, G. B., & Finney, R. L. (2019). *Calculus and analytic geometry* (10th ed.). Pearson.
- Van Rossum, G., & Drake, F. L. (2021). *Python 3 reference manual* (3rd ed.). CreateSpace.
- Wang, X., & Chen, J. (2020). A study on the efficiency of using Python for teaching multivariable calculus. *Journal of Computing and Mathematics*, 12(2), 47–58.