Jurnal Arjuna: Publikasi Ilmu Pendidikan, Bahasa dan Matematika
Volume 3, Nomor 1, Tahun 2025
e-ISSN: 3021-8136, p-ISSN: 3021-8144, Hal. 215-222
DOI: https://doi.org/10.61132/arjuna.v3i1.1531
Available Online at: https://journal.aripi.or.id/index.php/Arjuna

Estimasi Parameter Distribusi Weibull Menggunakan Metode Maksimum *Likelihood*

Isnaini Hafizhah Aziz [1*], Zahedi Zahedi [2], Sutarman Sutarman [3], Muhammad Romi Syahputra [4]
[1-4] Universitas Sumatera Utara, Indonesia
Email: snaihzer@gmail.com [1], zahedi@usu.ac.id [2]*

Abstract, *In various types of statistical analysis, the Weibull distribution is an important continuous probability distribution. One crucial aspect of studying this distribution is estimating its parameters. The maximum likelihood method is the approach used for the two-parameter Weibull distribution. This method aims to determine the parameter values by maximizing the likelihood function based on the available data. The advantages of the maximum likelihood method lie in its properties, such as consistency, efficiency, and asymptotic normality. Since the form of the likelihood function in the Weibull distribution is quite complex and cannot be solved analytically, numerical solutions are required. One approach used is the Newton-Raphson method, which serves to approximate the parameter values or find the optimal solution.*

Keywords*: Weibull distribution, Maximum likelihood method, Parameter estimation, Newton-Raphson.*

Abstrak, Dalam berbagai jenis analisis statistik, distribusi Weibull adalah distribusi probabilitas kontinu yang penting. Salah satu aspek krusial dalam mempelajari distribusi ini adalah mengestimasi parameternya. Metode maksimum adalah metode yang digunakan untuk distribusi Weibull dengan dua parameter. Metode ini bertujuan untuk menentukan nilai parameter dengan memaksimalkan fungsi likelihood berdasarkan data yang tersedia. Keunggulan metode maksimum likelihood terletak pada sifat-sifat, seperti konsistensi, efisiensi, dan sifat asimtotik normal. Karena bentuk fungsi likelihood pada distribusi Weibull cukup kompleks dan tidak dapat diselesaikan secara analitik, diperlukan penyelesaian numerik. Salah satu pendekatan yang digunakan adalah metode Newton-Raphson, yang berfungsi untuk menghampiri nilai parameter atau menemukan solusi optimal.

Kata Kunci *:* Distirbusi Weibull, Metode maksimum likelihood, Estimasi parameter, Newton-Raphson.

1. PENDAHULUAN

Dalam statistika, estimasi adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk memperkirakan hubungan parameter yang tidak diketahui dan juga merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan informasi dari sampel [3]. Estimasi parameter merupakan suatu tahapan penting untuk menaksir karakteristik populasi berdasarkan data sampel [12]. Dalam banyak penelitian, metode estimasi digunakan untuk menaksir parameter-parameter distribusi probabilitas yang mencakup distribusi probabilitas diskrit dan kontinu.

Distribusi Weibull adalah salah satu distribusi kontinu yang sangat umum digunakan dalam banyak bidang, terutama dalam analisis keandalan. Distribusi Weibull memiliki fleksibilitas yang memungkinkan penggunaanya dalam memodelkan berbagai pola waktu kegagalan suatu sistem. Distribusi ini umum digunakan dalam memprediksi waktu kegagalan suatu sistem, sehingga sangat relevan dalam industri memprioritaskan keandalan. Parameter bentuk (β) dan parameter skala (λ) adalah komponen penting dari distribusi Weibull dua

Received November 21, 2024; Revised Desember 10, 2024; Accepted Desember 29, 2024; Online Available Januari 02, 2025

parameter dalam menentukan pola kegagalan, yang mana nilai kedua parameter ini akan memengaruhi estimasi keandalan yang dihasilkan [9].

Salah satu metode yang efektif untuk mengestimasi parameter distribusi Weibull adalah metode maksimum *likelihood*. Metode ini bekerja dengan cara memaksimalkan fungsi *likelihood* berdasarkan data yang diamati. Keunggulan dari metode maksimum *likelihood* terletak pada sifat-sifatnya, seperti konsistensi, efesiensi dan normalitas asimtotik, sehingga sangat efektif dalam estimasi distribusi kontinu. Penerapan metode maksimum *likelihood* dalam distribusi Weibull menghasilkan tantangan tersendiri karena bentuk fungsi *likelihood* yang rumit yang tidak memungkinkan penyelesaian analitik secara langsung. Oleh karena itu, diperlukan pendekatan numerik, seperti metode Newton-Raphson atau metode iteratif lainnya untuk mencapai solusi yang optimal [10].

Distribusi Weibull

Distribusi Weibull dianggap salah satu distribusi kontinu dalam teori statistik dan probabilitas. Pada tahun 1939, ahli fisika Swedia Waloddi Weibull menggunakan distribusi ini untuk pertama kalinya. Aplikasinya sering menggunakan kontribusi ini untuk memodelkan “waktu sampai kegagalan (*time of failure*)” dari suatu sistem fisika. Sebagai ilustrasi yang umum, anggaplah bahwa kegagalan pada sistem meningkat dengan waktu, seperti yang terjadi pada beberapa semikonduktor, atau bahwa kegagalan terjadi sebagai akibat dari kejadian yang terjadi pada sistem [2]. Distribusi Weibull dimulai dengan 3 (tiga) parameter, kemudian muncul dengan 2 (dua) dan 1 (satu) parameter seiring perkembangan konsep [9]. Dalam penelitian ini, hanya distribusi Weibull dengan 2 (dua) patameter yang digunakan.

Dalam distribusi 2 (dua) parameter ini, hanya dua parameter yang disertakan, yaitu dalam distribusi kumulatifnya adalah:

1. **Distribusi versi skala bentuk.**

$$f(x|0,\lambda,\beta)=\frac{\beta}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta-1}\exp\left\{-\left(\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}\right)\right\} \quad (1)$$

2. **Distribusi versi lokasi bentuk.**

$$f(x|\alpha,1,\beta)=\beta(x-\alpha)^{\beta-1}\exp\{-(x-\alpha)^{\beta}\} \quad (2)$$

3. **Distribusi versi pergeseran skala.**

$$f(x|\alpha,\lambda,1)=\frac{1}{\lambda}\exp\left\{-\left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^{\beta}\right\} \quad (3)$$

e-ISSN: 3021-8136, p-ISSN: 3021-8144, Hal. 215-222

Fungsi kepadatan probabilitas dari variable acak kontinu X adalah jika distribusi Weibull dimiliki oleh parameter bentuk (β) dan parameter skala (λ), dimana masing-masing $\beta > 0$ dan $\lambda > 0$, maka fungsi kepadatan probabilitasnya adalah:

$$f_x(x;\beta,\lambda) = \begin{cases} \frac{\beta}{\lambda^{\beta}} x^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}\right] ; x \geq 0 \\ 0 \, ; lainnya \end{cases} \quad (4)$$

Metode Maksimum Likelihood

Metode maksimum *likelihood* adalah teknik mengestimasi parameter yang tidak diketahui. Dengan langkah-langkah sistematis penaksiran maksimum *likelihood*, dapat mengetahui apakah estimasi parameter yang tidak diketahui dari fungsi *likelihood* sampel sudah memaksimumkan fungsinya [1].

Untuk menghitung estimasi maksimum *likelihood* θ_i, langkah-langkah yang harus dilakukan yaitu:

1. Tentukan fungsi *likelihood*.

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta)$$

2. Membentuk logaritma natural *likelihood*.

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \ln\big(f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta)\big)$$

3. Menyelesaikan persamaan logaritma natural *likelihood* terhadap $\boldsymbol{\theta}$.

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0$$

4. Didapat penaksiran estimasi maksimum *likelihood* $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

2. METODE PENELITIAN

Karena distribusi Weibull memiliki karakteristik tertentu atau ekuivalen dengan distribusi tertentu, distribusi ini sering digunakan untuk menentukan karakteristik fungsi kerusakan. Parameter yang diestimasi dari distribusi Weibull harus akurat untuk memaksimalkan model dalam berbagai aplikasi karena distribusi ini sangat fleksibel dan dapat meniru karakteristik distribusi lainnya. Karena itu peneliti menggunakan metode maksimum *likelihood* untuk mengestimasi parameter distribusi Weibull dengan dua parameter. Dalam banyak kasus, ini menjadikan metode maksimum *likelihood* sebagai pilihan utama dalam estimasi parameter distribusi Weibull karena kemampuannya untuk memberikan hasil yang optimal dengan data yang memadai. Langkah-langkah metodologi penelitian ini disusun sebagai berikut:

1. Mengumpulkan berbagai referensi berupa buku ataupun jurnal yang berhubungan dengan penelitian yang dilakukan.
2. Menentukan fungsi densitas dari distribusi Weibull dengan dua parameter.
3. Menentukan fungsi *likelihood* dari $\sum_{i=1}^{n} f(x_i;\beta,\lambda)$.
4. Mengubah fungsi *likelihood* ke dalam bentuk logaritma *likelihood*.
5. Memaksimalkan fungsi *likelihood* dengan menurunkan fungsi logaritma *likelihood* dan disamadenganka 0.
6. Membentuk persamaan *likelihood* sehingga diperoleh estimator parameter β dan λ yaitu $\hat{\beta}$ dan $\hat{\lambda}$.
7. Menghintung nilai parameter menggunakan metode Newton-Raphson pada program R dengan contoh data yang digunakan.
8. Menarik kesimpulan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Metode maksimum *likelihood* merupakan salah satu cara untuk menghitung parameter, dengan tujuan untuk menemukan estimasi parameter θ dengan memaksimumkan fungsi *likelihood* yang dapat dicapai karena distribusi data diketahui. Untuk langkah awal, fungsi probabilitas distribusi yang digunakan untuk distribusi Weibull dengan dua parameter harus diketahui.

Fungsi Likelihood pada Distribusi Weibull

Dalam menentukan fungsi logaritma likelihood diawali dengan menentukan fungsi likelihood dan fungsi densitas dari distribusi Weibull,

$$f_x(x;\beta,\lambda) = \frac{\beta}{\lambda^\beta} x_i{}^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^\beta\right] \qquad (5) \qquad ($$

Dengan memisalkan $\theta = \lambda^\beta$, maka

$$f_x(x;\beta,\lambda) = \frac{\beta}{\theta} x_i^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x_i^\beta}{\theta}\right)\right] \qquad (6)$$

Sehingga diperoleh

$$L(\beta,\theta|x) = \prod_{i=1}^{n} f_x(x_i|\beta,\theta)$$

$$L(\beta,\theta|x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta}{\theta} x_i^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x_i^\beta}{\theta}\right)\right] \qquad (7)$$

e-ISSN: 3021-8136, p-ISSN: 3021-8144, Hal. 215-222

Berdasarkan persamaan (7) dapat membentuk fungsi logaritma natural likelihood :

$$\ln(\beta,\theta|x) = \ln\left[\prod_{i=1}^{n}\frac{\beta}{\theta}x_i^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{x_i^{\beta}}{\theta}\right)\right]\right]$$

$$\ln(\beta,\theta|x) = n.\ln\beta - n.\ln\theta + (\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta} \tag{8}$$

Kemudian persamaan (8) dilakukan proses diferensiasi secara parsial, sehingga diperoleh persamaan $\hat{\beta}$ dan $\hat{\lambda}$ sebagai berikut :

$$\hat{\beta} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{\beta}}.\ln(x_i)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{\beta}}} - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)}{n}\right]^{-1} \tag{9}$$

$$\hat{\lambda} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{\beta}}\right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}} \tag{10}$$

Aplikasi Pada Data

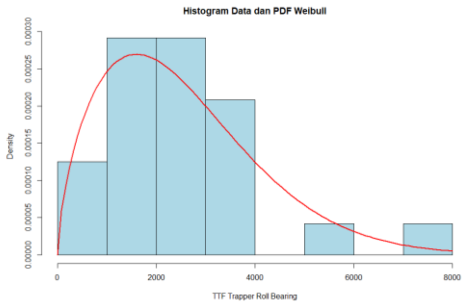
Salah satu contoh aplikasi data yang digunakan adalah data perhitungan TTF (*Time To Failure*) pada komponen *Trapper Roll Bearing* yang berdistribusi Weibull. Penelitian sebelumnya oleh Latib and Doaly (2018) adalah sumber data yang digunakan dalam penelitian ini. Tabel 1 merupakan sampel data dari perhitungan TTF pada komponen *Trapper Roll Bearing*.

Tabel 1 Data perhitungan TTF pada komponen *Trapper Roll Bearing*

Data ke-	TTF	Data ke-	TTF
1	166,00	13	2398,15
2	882,67	14	2415,00
3	897,24	15	2494,33
4	1127,82	16	2753,83
5	1177,55	17	2999,00
6	1424,25	18	3040,33
7	1554,00	19	3501,75
8	1685,38	20	3581,33
9	1696,95	21	3647,20
10	1725,32	22	3719,00
11	2135,00	23	5805,80
12	2300,00	24	7919,00

Berdasarkan persamaan (9) dan (10), estimasi parameter tidak dapat diselesaikan secara langsung, maka pada metode maksimum likelihood diperlukan metode numerik yaitu Newton-Raphson pada program R terhadap β. Sehingga menghasilkan nilai parameter bentuknya ($\hat{\beta} = 1{,}635$) dan parameter skalanya ($\hat{\lambda} = 2847{,}348$).

Gambar 1. Grafik Hasil Estimasi Parameter



Grafik tersebut menjelaskan bahwa kurva PDF distribusi Weibull yang di-*overlay* pada grafik histogram merupakan distribusi data kegagalan (*time to failure* atau TTF) yang telah dimodelkan menggunakan distribusi Weibull dengan estimasi parameter melalui metode maksimum *likelihood*. Distribusi data aktual yang digambarkan oleh histogram berwarna biru muda, terlihat sebagian besar kegagalan terjadi pada rentang waktu 2000 hingga 3000, sementara frekuensi kegagalan menurun pada waktu yang lebih panjang. Kurva merah menunjukkan fungsi PDF distribusi Weibull yang telah diestimasi parameternya menggunakan metode maksimum *likelihood*, yaitu dengan nilai parameter bentuk ($\hat{\beta} = 1{,}635$) dan parameter skala ($\hat{\lambda} = 2847{,}348$). Dari grafik tersebut juga terlihat bahwa kurva PDF yang sesuai dengan histogramnya menunjukkan estimasi parameter dengan metode maksimum *likelihood* memberikan model yang akurat untuk mendeskripsikan pola distribusi data. Hasil estimasi ini dapat digunakan untuk menganalisis keandalan dan prediksi pola kegagalan di masa mendatang.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya diperoleh kesimpulan yaitu:

a) Persamaan hasil estimasi parameter distribusi Weibull menggunakan metode maksimum *likelihood* adalah:

$$\hat{\beta} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}} . \ln(x_i)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}}} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}{n} \right]^{-1}$$

$$\hat{\lambda} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}}\right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}}$$

b) Kemudian nilai parameter yang didapat adalah $\hat{\beta} = 1{,}635$ dan $\hat{\lambda} = 2847{,}348$ melalui perhitungan dengan metode Newton-Raphson yang dilakukan pada program R.

Dari hasil perhitungan, juga terdapat grafik yang menunjukkan bahwa kurva PDF sesuai dengan histogramnya, dimana dapat dikatakan bahwa metode maksimum *likelihood* memberikan model yang akurat untuk mendeskripsikan pola distribusi data, dimana hasil dari estimasi ini dapat digunakan untuk menganalisis nilai keandalan dan pola kegagalan di masa mendatang.

Saran

Untuk penelitian selanjutnya, diharapkan untuk menerapkan beberapa metode dan distribusi yang lain guna melakukan perbandingan antara satu metode dan distribusi lainnya. Dengan demikian, metode dan distribusi yang paling efektif dapat dipilih untuk diterapkan pada objek penelitian.

DAFTAR PUSTAKA

Bain, L.J. and Engelhardt, M. (1992) Introduction Probability and Mathimatical Statistics. California: Wadsworth Publishing Company.

Harinaldi (2005) Prinsip-Prinsip Statistika untuk Teknik dan Sains. Jakarta: Erlangga

Hassan, M.I. (2002) Pokok-Pokok Materi Statistika 2 (Statistika Deskriptif). Jakarta: Bumi Putera.

Hidayati, T., Aedi, W.G. and Masitoh, L.F. (2022) METODE NUMERIK.

Latib, I. and Doaly, C.O. (2018) 'Usulan Penjadwalan Penggatian dan Pemeriksaan Komponen Kritis Mesin Feeder dan Fanblower (Studi Kasus di PT. Petnesia Resindo)', Jurnal Teknik Industri, 8(2).

Matematika, Jurnal et al. (no date) ESTIMASI PARAMETER DARI DISTRIBUSI WEIBULL BERDASARKAN SAMPEL TERSENSOR TIPE II DAN TIPE I. Available at: http://ojs.uho.ac.id/index.php/JMKS.

Nketiah, E.A. (2021) 'Parameter estimation of the Weibull Distribution; Comparison of the Least-Squares Method and the Maximum Likelihood estimation', International Journal of Advanced Engineering Research and Science, 8(9), pp. 210–224. Available at: https://doi.org/10.22161/ijaers.89.21.

Nuryadi et al. (2017) DASAR-DASAR STATISTIK PENELITIAN. Edited by Nuryadi et al. Yogyakarta: SIBUKU MEDIA. Available at: www.sibuku.com.

Otaya, L.G. (2016) Distribusi Probabilitas Weibull Dan Aplikasinya (Pada Persoalan Keandalan (Reliability) Dan Analisis Rawatan (Mantainability).

Purba, S.A. (2020) ESTIMASI PARAMETER DATA BERDISTRIBUSI NORMAL MENGGUNAKAN MAKSIMUM LIKELIHOOD BERDASARKAN NEWTON RAPHSON ESTIMATION OF NORMAL DISTRIBUTED DATA PARAMETERS USING THE MAXIMUM LIKELIHOOD BASED ON NEWTON RAPHSON, J. Sains.

Yanuar, F., Wulandari, S. and Rahmi HG, I. (2021) ‘ANALISIS SURVIVAL UNTUK PARAMETER SKALA DARI DISTRIBUSI WEIBULL MENGGUNAKAN MLE DAN METODE BAYESIAN’, BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, 15(1), pp. 147–156. Available at: https://doi.org/10.30598/barekengvol15iss1pp147-156.

Yendra, R. et al. (2015) Perbandingan Estimasi Parameter Pada Distribusi Eksponensial Dengan Menggunakan Metode Maksimum Likelihood Dan Metode Bayesian, Jurnal Sains Matematika dan Statistika.